

6. Eigenwertverfahren

Inhalt

6.1 Karhunen-Loève-Transformation (KLT)

- Definition und Eigenschaften
- Zeitdiskrete Karhunen-Loève-Transformation
- Approximation durch Cosinus-Transformation

6.2 Matched-Filter

- Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnisses (SNR)
- Korrelationsempfänger

6.1 Karhunen-Loève-Transformation (KLT)

6.1 Karhunen-Loève-Transformation (KLT)

- **Idee:** signalabhängige Transformation basierend auf den Eigenvektoren der Autokorrelationsmatrix des Signals

6.1.1 Definition und Eigenschaften

- **Ziel:** Approximation von Signalen, die als stochastischer Prozess modelliert werden
- **Anwendungen:** Signalanalyse (Reduktion auf wesentliche Merkmale), effektive Signalcodierung bei der Datenübertragung/-speicherung etc.
- **Gegeben:** Reeller, zeitkontinuierlicher, **mittelwertfreier** Zufallsprozess $x(t)$
- **Gesucht:** Im statistischen Mittel konvergierende (*“limes in mean”*) Reihenentwicklung in eine zunächst unbekannte **orthonormale** Basis $\varphi_i(t)$:

$$x(t) = \text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \left(\sum_{i=1}^N b_i \varphi_i(t) - x(t) \right)^2 \right\} = 0$$

- Einzelne Musterfunktionen müssen dabei nicht unbedingt darstellbar sein

6.1.1 Definition und Eigenschaften

- Die Orthonormalitätsbedingung für die Basisfunktionen lautet:

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \delta_{ij}$$

- Aufgrund der Orthonormalität werden die Koeffizienten durch Projektion berechnet:

$$b_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle = \int_a^b x(t) \varphi_i^*(t) dt$$

Forderung:

- Koeffizienten der KLT sollen paarweise **unkorreliert** sein (Kovarianz = 0)

$$E \{ b_i b_j^* \} = E \{ \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle \langle x(t), \varphi_j(t) \rangle^* \} \stackrel{!}{=} \lambda_j \cdot \delta_{ij}$$

- Kovarianzmatrix des Koeffizientenvektors ist eine Diagonalmatrix

6.1.1 Definition und Eigenschaften

- Aus der Bedingung für die Unkorreliertheit der Koeffizienten erhält man durch Einsetzen ihrer Berechnungsvorschrift:

$$\begin{aligned} E \{ b_i b_j^* \} &= E \left\{ \left(\int_a^b x(t) \varphi_i^*(t) dt \right) \cdot \left(\int_a^b x(t') \varphi_j^*(t') dt' \right)^* \right\} \\ &= E \left\{ \int_a^b \varphi_i^*(t) \int_a^b x(t) x^*(t') \varphi_j(t') dt' dt \right\} \\ &= \int_a^b \varphi_i^*(t) \int_a^b \underbrace{E \{ x(t) x^*(t') \}}_{r_{xx}(t, t')} \varphi_j(t') dt' dt \\ &= \int_a^b \varphi_i^*(t) \underbrace{\int_a^b r_{xx}(t, t') \varphi_j(t') dt'}_{\stackrel{!}{=} \lambda_j \varphi_j(t)} dt \stackrel{!}{=} \lambda_j \cdot \delta_{ij} \end{aligned}$$

6.1.1 Definition und Eigenschaften

- Der Kern der Integraldarstellung ist die Autokorrelationsfunktion (AKF):

$$r_{xx}(t, t') = E \{x(t) x^*(t')\}$$

- Folgende Bedingung garantiert die **Unkorreliertheit** der Koeffizienten:

$$\int_a^b r_{xx}(t, t') \varphi_j(t') dt' = \lambda_j \varphi_j(t)$$

- Die gesuchten Basisfunktionen ergeben sich durch die Lösung der obigen Integralgleichung
- Die Basisfunktionen $\varphi_j(t)$ heißen **Eigenfunktionen** des Integraloperators
- Die λ_j sind die zugehörigen Eigenwerte

6.1.1 Definition und Eigenschaften

- Erwartungswert der Signalenergie ist gleich der Summe aller Eigenwerte:

$$\begin{aligned} E \left\{ \int_a^b |x(t)|^2 dt \right\} &= E \left\{ \int_a^b \left(\underset{N \rightarrow \infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i(t) \right) \cdot \left(\underset{N \rightarrow \infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{j=1}^N b_j \varphi_j(t) \right)^* dt \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E \{ b_i b_j^* \} \underbrace{\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt}_{=\delta_{ij}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N E \{ |b_i|^2 \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \lambda_i \end{aligned}$$

- Gute Signalkompression durch Berücksichtigung der großen Eigenwerte (Weglassen kleiner Eigenwerte) möglich
- In der praktischen Anwendung ist die Lösung der Integralgleichung zur Bestimmung der Eigenfunktionen problematisch
- Integralgleichung muss pro Anwendungsfall nur einmal gelöst werden

- Stochastischer Prozess: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ (N Abtastwerte)
- Orthonormale Basis: $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$
 $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \Phi^T \Phi^* = \mathbf{I}$
- Reihenentwicklung: $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = \Phi \cdot \mathbf{b}$ mit $\boldsymbol{\mu} := E\{\mathbf{x}\}$
- Koeffizienten: $b_i = \langle \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}, \varphi_i \rangle = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \varphi_i^* = \varphi_i^H (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$
 $\Rightarrow \mathbf{b} = \Phi^H \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ mit $\Phi^H = \Phi^{T*}$
- **Forderung:** Unkorrelierte Koeffizienten:

$$E \{ b_i b_j^* \} = E \{ \varphi_i^H (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H \varphi_j \} = \varphi_i^H \mathbf{C}_{xx} \varphi_j \stackrel{!}{=} \lambda_j \delta_{ij}$$

$$\mathbf{C}_{xx} \varphi_j = \lambda_j \varphi_j$$

- Eigenvektoren der **Kovarianzmatrix** entsprechen den gesuchten Basisfunktionen

- \mathbf{C}_{xx} symmetrisch $\Rightarrow N$ reelle, nicht-negative Eigenwerte $\lambda_j \geq 0$

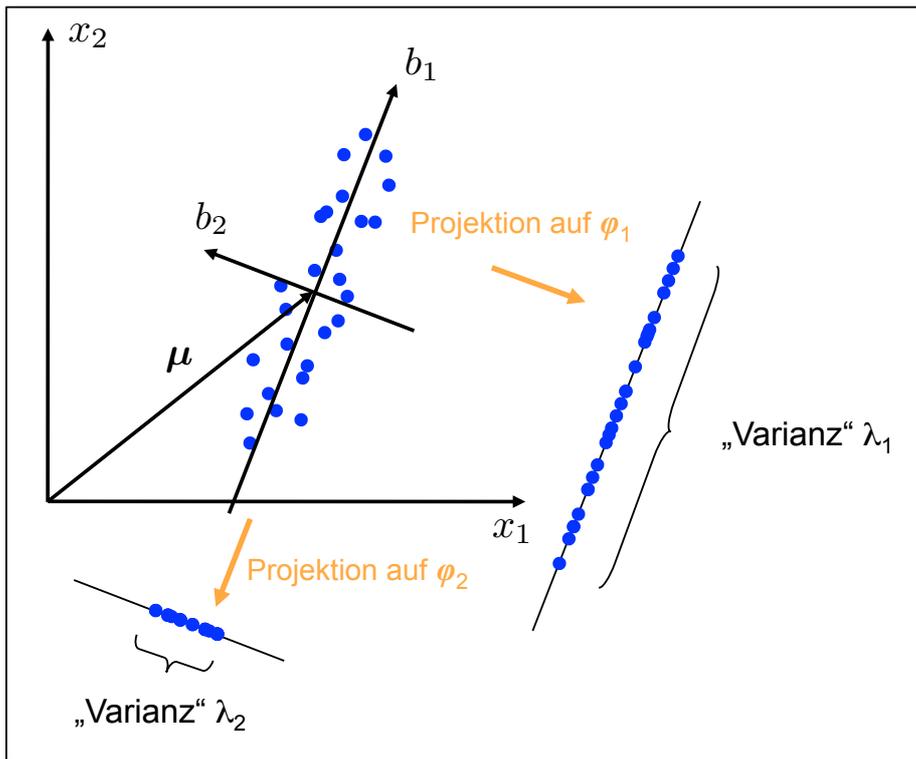
- Approximation von \mathbf{x} durch $m < N$ Basisvektoren mit größtem Eigenwert
 \rightarrow Signalenergie des Fehlers dadurch minimal:

$$E \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right\} = E \left\{ \left\| \sum_{i=m+1}^N b_i \varphi_i \right\|^2 \right\} = \sum_{i=m+1}^N \lambda_i$$

Diskussion

- Approximation entspricht einer linearen Projektion auf einen Unterraum geringerer Dimension
- Dabei liefert die KLT die Projektion, die einen gegebenen Zufallsvektor \mathbf{x} im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal repräsentiert
- Koeffizienten sind paarweise **unkorreliert**
- Varianzen λ_i der Koeffizienten b_i sind **maximal ungleichverteilt**: minimale Entropie der Varianzen

Veranschaulichung der Karhunen-Loève-Transformation



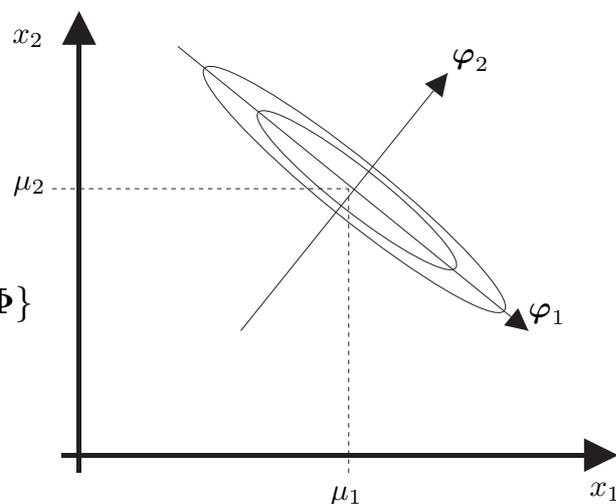
Beispiel: Zweidimensionaler normalverteilter stochastischer Prozess

- Der zum Eigenvektor φ_1 gehörende Eigenwert λ_1 in Hauptachsenrichtung sei größer als λ_2 („Varianzen“):

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

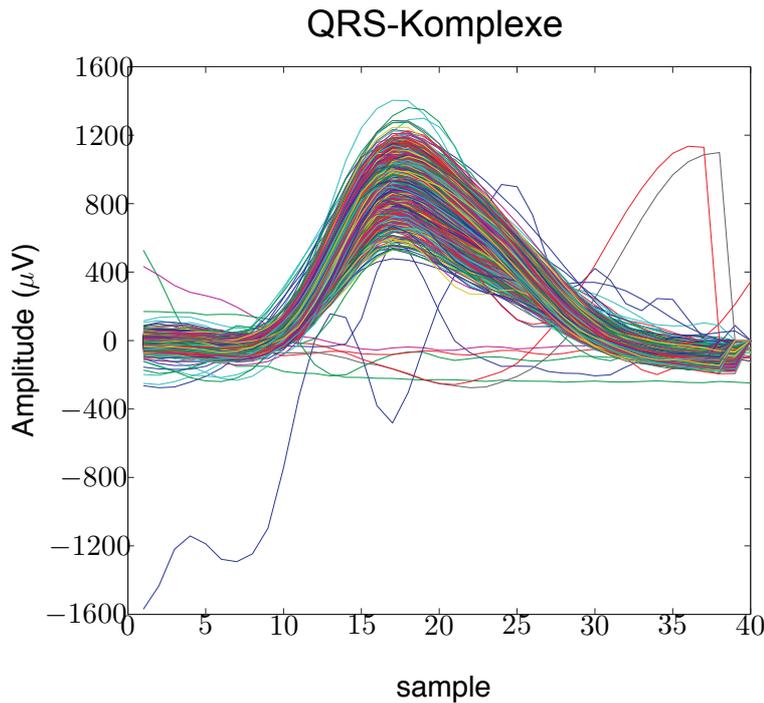
- Die Autokorrelationsmatrix des Koeffizientenvektors ist wegen der Unkorreliertheit der Koeffizienten eine Diagonalmatrix:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^H\} &= E\{\Phi^H(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H\Phi\} \\ &= \Phi^H \mathbf{C}_{xx} \Phi \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda \end{aligned}$$



- Die Eigenvektormatrix Φ bewirkt eine unitäre Ähnlichkeitstransformation der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{xx} in die Diagonalmatrix Λ ihrer Eigenwerte

Beispiel: Erkennung von Ausreißern in der automat. EKG-Auswertung



Vorgehensweise bei der Hauptkomponentenanalyse (PCA)

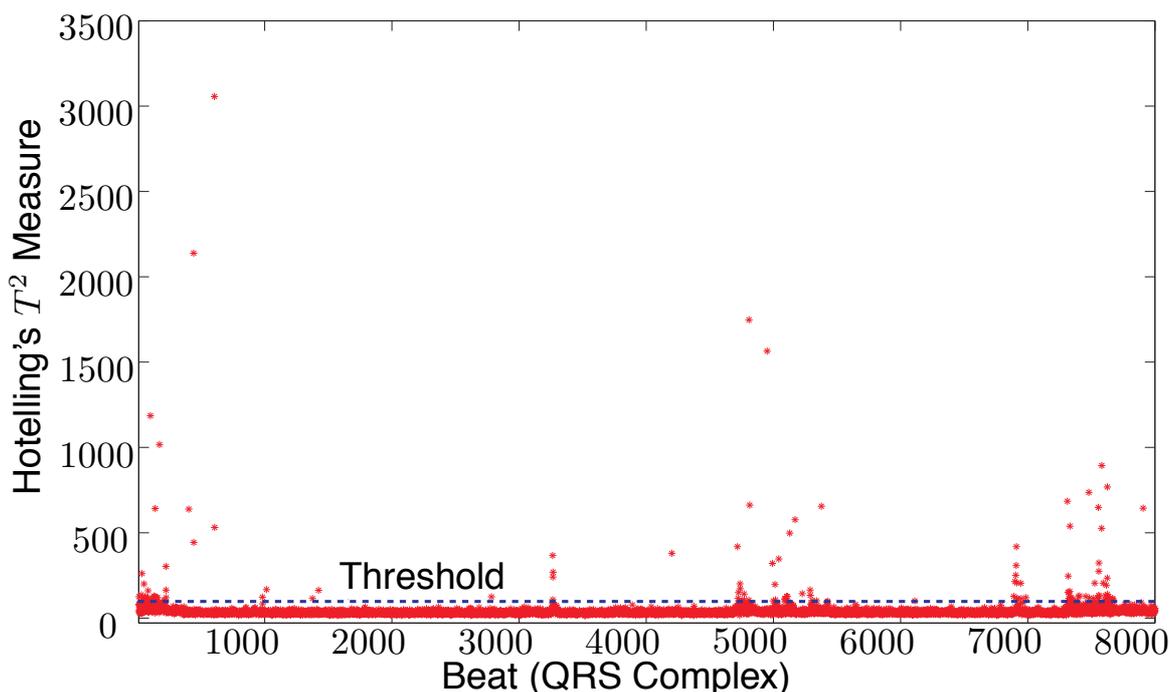
- PCA (*Principal Component Analysis*): empirische Variante der KLT
- Einzelnes Signal: $\mathbf{x}_m = [x_{1m}, \dots, x_{Nm}]^T, \quad m = 1 \dots M$
- Abziehen des Mittelwerts $\bar{x}_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{nm}$
 → mittelwertfreies Signal: $\mathbf{z}_m := [x_{1m} - \bar{x}_m, \dots, x_{Nm} - \bar{x}_m]^T$
- Spaltenvektoren als Matrix: $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M]$
- Kovarianz- bzw. Streumatrix: $\mathbf{C}_{zz} = \mathbb{E}\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\} \approx \frac{1}{M} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H = \frac{1}{M} \sum \mathbf{z}_m \mathbf{z}_m^H$
- Lösung des Eigenwertproblems: Berechnung der Eigenwertmatrix Λ_{zz} und der Eigenvektormatrix Φ
- Sortierung nach der Größe der Eigenwerte

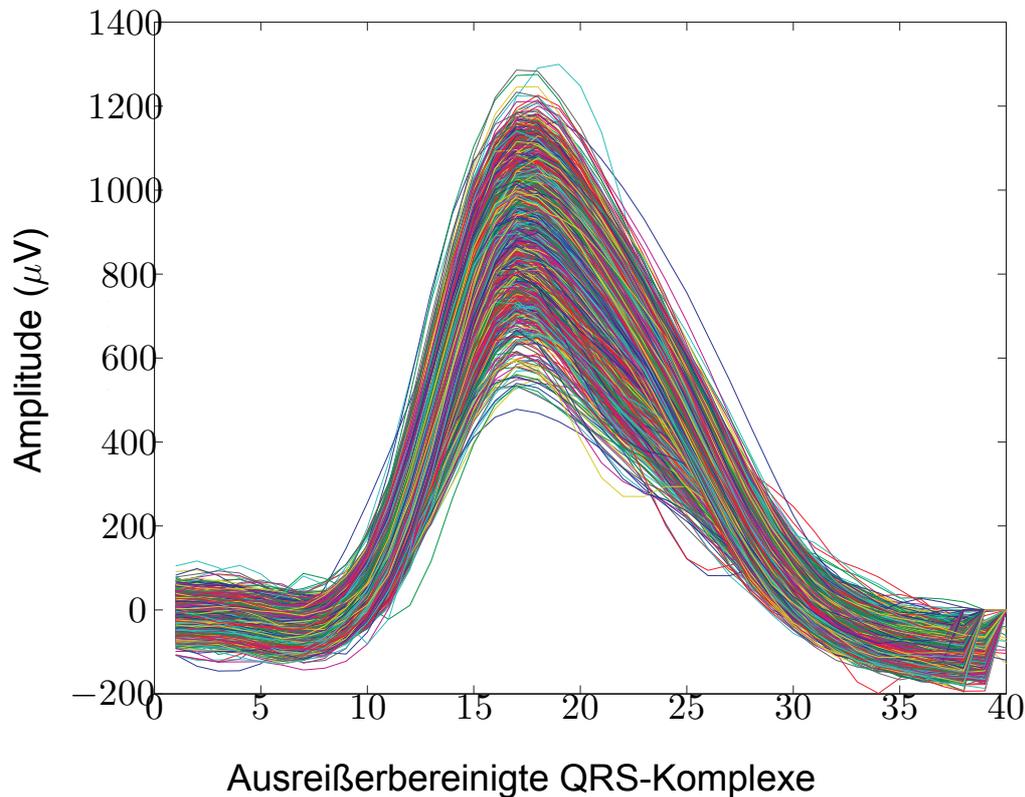
■ KLT:
$$\mathbf{B} = \Phi^H \cdot \mathbf{Z} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M] = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NM} \end{bmatrix}$$

- Da die Eigenwerte der Kovarianzmatrix sortiert wurden, konvergieren sie gegen null
- Für Signale, die der Statistik der Mehrheit aller Signale folgen, konvergieren die Koeffizienten ebenfalls gegen null
- Für Signale, deren Statistik sich von der der Mehrheit aller Signale unterscheidet (Ausreißer), konvergieren die Koeffizienten dagegen nicht

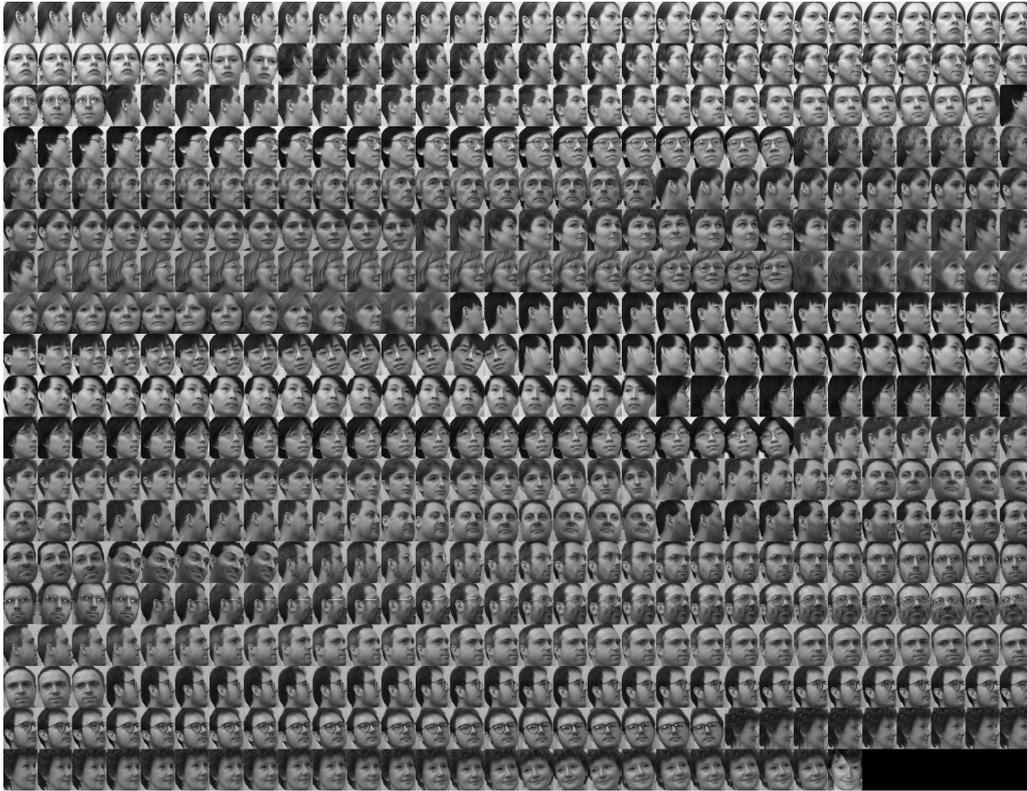
■ Hotelling- T^2 -Maß:
$$T_m^2 = \sum_{n=1}^N \frac{b_{nm}^2}{E\{b_{nm}^2\}} = \sum_{n=1}^N \frac{b_{nm}^2}{\lambda_n} \quad (\text{Gleichrichtung})$$

- T_m^2 groß für Ausreißer wegen Gewichtung mit $1/\lambda_n \rightarrow$ gut für Detektion!



**Beispiel: Gesichtserkennung mit Eigengesichtern (eigenfaces)**Grauwertbild eines Gesichtes: $g_m(x,y)$, $m = 1, \dots, M$ Bild als Spaltenvektor: $\mathbf{x}_m := \text{Row}\{g(x,y)\} \in \mathbb{R}^{N^2}$ Datenmatrix: $\mathbf{Z} := [\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}_M - \bar{\mathbf{x}}]$, $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{x}_i$ Kovarianz- bzw. Streumatrix: $\mathbf{C}_{zz} = E\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\} \approx \frac{1}{M} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H = \frac{1}{M} \sum \mathbf{z}_m \mathbf{z}_m^H$
 $N^2 \times N^2$ -Matrix \rightarrow Eigenvektoren praktisch nicht berechenbarRechentrick: $\mathbf{L}_{zz} := \frac{1}{N^2} \mathbf{Z}^H \mathbf{Z}$ $M \times M$ -Matrix \rightarrow Eigenvektoren praktisch berechenbar**Es gilt:** Die ersten M ($M < N^2$) zu den größten Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren von \mathbf{C}_{zz} lassen sich aus den fallend sortierten Eigenvektoren $\boldsymbol{\eta}_i$ von \mathbf{L}_{zz} berechnen mittels:

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \frac{\mathbf{Z} \boldsymbol{\eta}_i}{\|\mathbf{Z} \boldsymbol{\eta}_i\|}, \quad i = 1, \dots, M \quad \text{Eigengesichter}$$



Mittleres Gesicht \bar{x}



Quelle: <http://images.ee.umist.ac.uk/danny/database.html>

565 Gesichter von 20 Personen

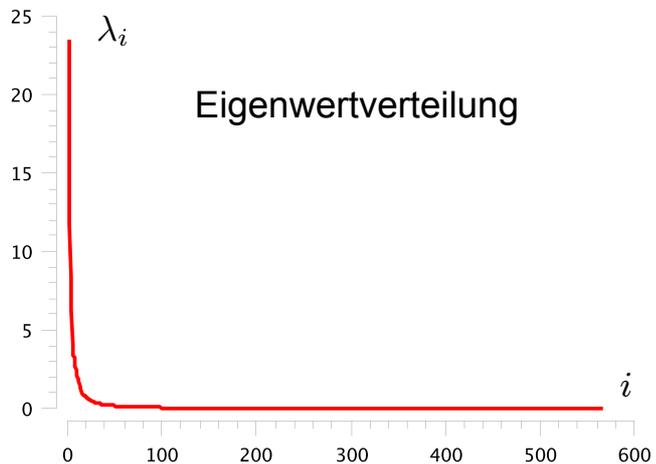
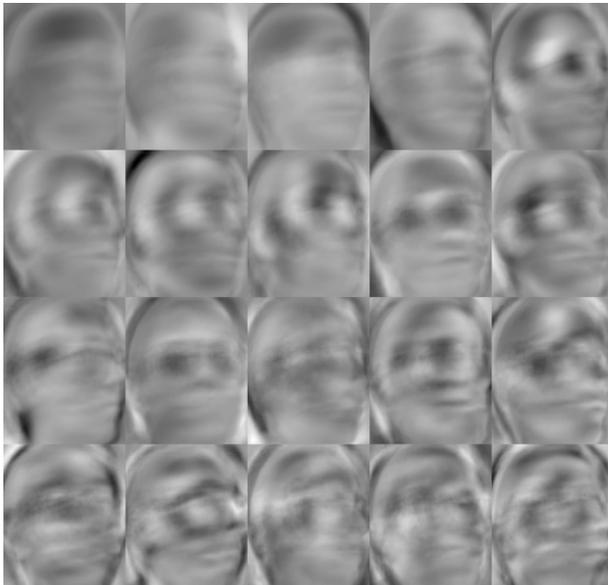


Mittleres Gesicht \bar{x}

Merkmale für die Gesichtserkennung:

Die ersten 20 Eigengesichter φ_i

$$\mathbf{b} = [\varphi_1, \dots, \varphi_M]^H (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$



Beispiel: Interpolation zwischen Gesichtern

- Voraussetzung: Gesichter wurden zuvor merkmalsgestützt zur perfekten Deckung gebracht



Anti-John



Durchschnitts-
mann



50% John

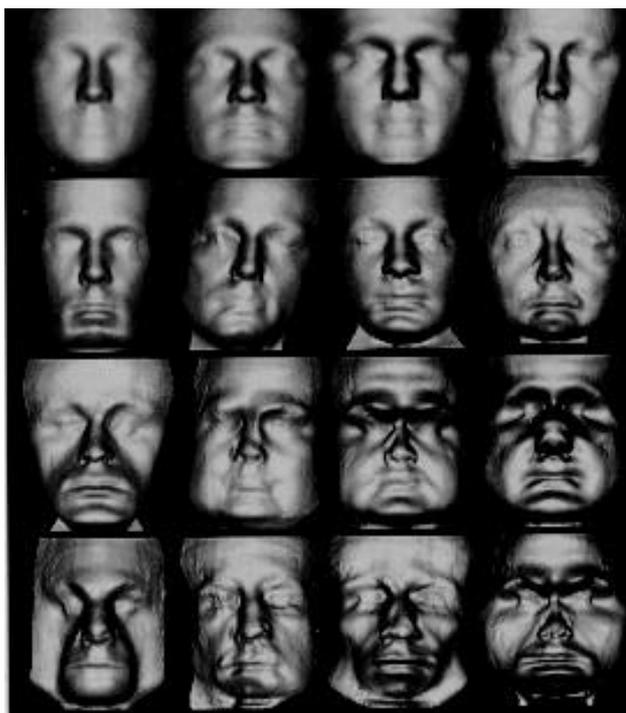


John

Quelle: Leopold, D. A., O'Toole, A. J., Vetter, T. and Blanz, V. (2001)

Beispiel: Gesichtserkennung mit Eigengesichtern (3D-Gesichtsdaten)

Erste 16 Eigengesichter
von 3D-Gesichtsdaten

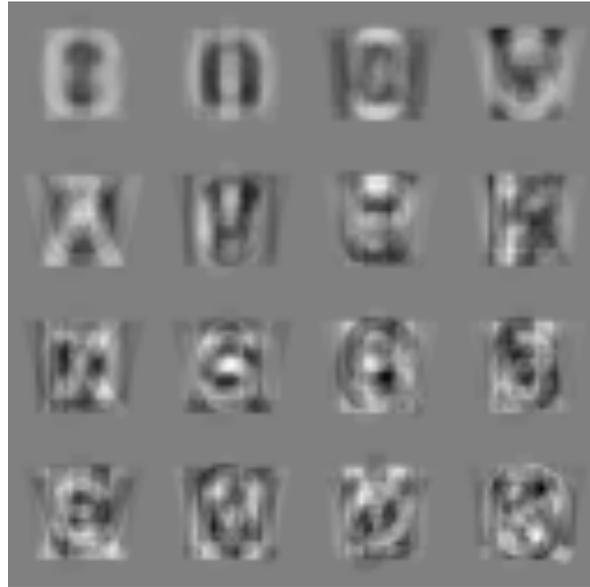


<http://www.ausbcomp.com/~bbott/wik/eigenface.htm>

Beispiel: Merkmale für die Zeichenerkennung



Zeichenvorrat
(Bildgröße jeweils 32×32)



Erste 16 von 64 Eigenvektoren
für die Zeichenerkennung



Zeichenrekonstruktion durch
Berücksichtigung von 16 Merkmalen



Zeichenrekonstruktion durch
Berücksichtigung von 32 Merkmalen

Markov-Prozess:

- Farbiger Rauschprozess, der als Ausgangssignal eines LTI-Systems 1. Ordnung interpretiert wird, das mit weißem Rauschen $w(n)$ angeregt wird:

$$x(n) = a \cdot x(n-1) + w(n), \quad 0 < a < 1$$

- Rekursives Einsetzen ergibt: $x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i w(n-i)$ (Faltungssumme)
- Durch das Tiefpassverhalten ist der Ausgangsprozess $x(n)$ korreliert
- Nach Abs. 7.2.4 lautet die Autokovarianzmatrix eines Markov-Prozesses:

$$\mathbf{C}_{xx} = \sigma_x^2 \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{N-1} \\ a & 1 & a & \dots & a^{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a^{N-1} & a^{N-2} & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Die Eigenvektoren der Autokovarianzmatrix des Markov-Prozesses sind die Basisvektoren der Karhunen-Loève-Transformation

- **Idee:** Approximation der signalabhängigen KLT durch die signalunabhängige diskrete Cosinus-Transformation (DCT), um sich die aufwendige Berechnung der Basisvektoren zu ersparen
- **Voraussetzung:** stark korrelierter Prozess (s. u.)
- Man kann zeigen, dass die Basisvektoren der DCT:

$$\varphi_i(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \gamma_i \cdot \cos((m + 1/2)\pi i/N), \quad \gamma_i = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & i = 0, N \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Eigenvektoren von Matrizen der folgenden Form sind:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (1-b) & -b & & \mathbf{0} \\ -b & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -b \\ \mathbf{0} & & & (1-b) \end{bmatrix}$$

- Weiterhin gilt: Eine Matrix und ihre Inverse haben dieselben Eigenvektoren

- Die inverse der Kovarianzmatrix lässt sich geschlossen angeben (Kap. 7):

$$C_{xx}^{-1} = \frac{1+a^2}{\sigma_x^2(1-a^2)} \cdot \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{a^2}{1+a^2}\right) \frac{-a}{1+a^2} & & & 0 \\ \frac{-a}{1+a^2} & 1 & \ddots & \\ (1-b) & -b & \ddots & 0 \\ -b & 0 & \ddots & \frac{-a}{1+a^2} \left(1 - \frac{a^2}{1+a^2}\right) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-b}{(1+a^2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \approx \frac{a^2}{1+a^2}$$

- Für $0,9 < a < 1$ gilt näherungsweise: $\frac{-b}{(1+a^2)} \approx \frac{a^2}{1+a^2}$
- Multiplikation einer Matrix mit e. Konstante ändert die Eigenvektoren nicht
- ⇒ Für $0,9 < a < 1$ (starke Korrelation) approximiert die DCT die KLT

Beispiel: Bildcodierung

- Grauwertbildzerlegung in quadratische Blöcke: $x(n,m)$, $n,m = 0 \dots N-1$

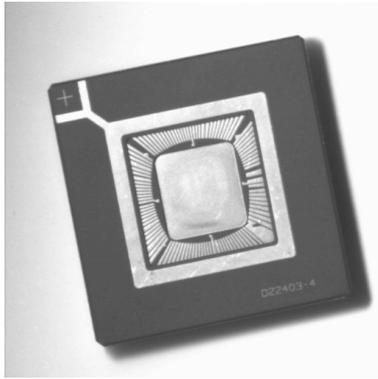
- Zweidimensionale DCT:
$$y(i,j) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n,m) \varphi_i^*(n) \varphi_j^*(m)$$

- Quantisierung d. DCT-Spektrums zur Speicherreduktion: $y_q(i,j) = \left\lfloor \frac{y(i,j)}{q(i,j)} \right\rfloor$

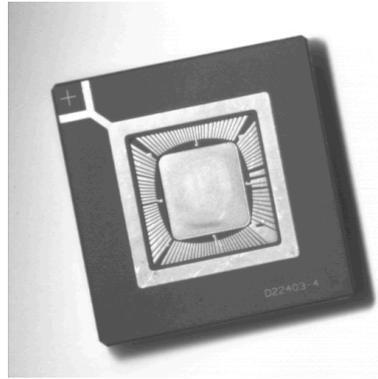
- Die sog. Quantisierungstafeln $q(i,j)$ unterdrücken dabei hohe Frequenzanteile selektiv unter Berücksichtigung der menschlichen Wahrnehmung:

- Intensitäten grober Strukturen (niedrige Ortsfrequenzen) werden empfindlicher wahrgenommen → feiner quantisiert: kleineres $q(i,j)$
- Intensitäten feiner Strukturen (hohe Ortsfrequenzen) werden weniger empfindlich wahrgenommen → gröber quantisiert: größeres $q(i,j)$
- Rekonstruktion:
 - Requantisierung: $y_r(i,j) = y_q(i,j) \cdot q(i,j)$
 - Inverse DCT

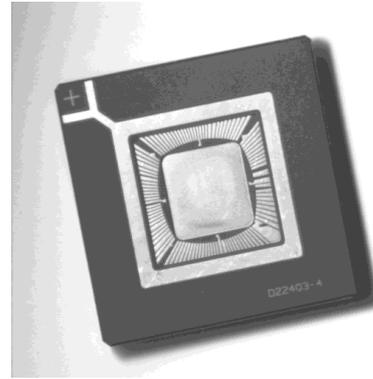
6.1.3 Approximation durch Cosinus-Transformation



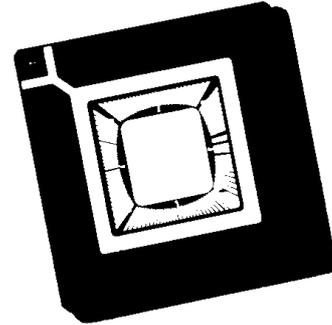
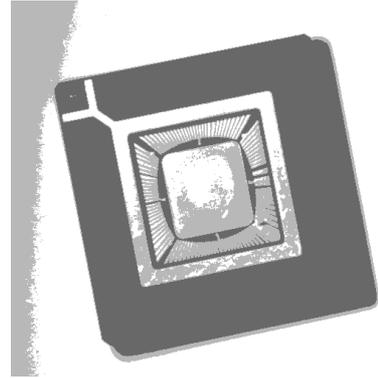
↑ 64 Werte ↓ 8 Werte



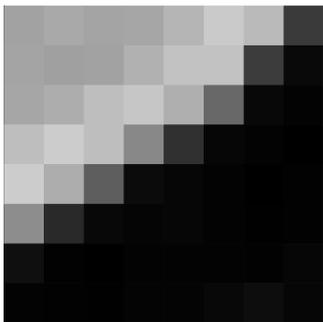
↑ 32 Werte ↓ 4 Werte



↑ 16 Werte ↓ 2 Werte



6.1.3 Approximation durch Cosinus-Transformation



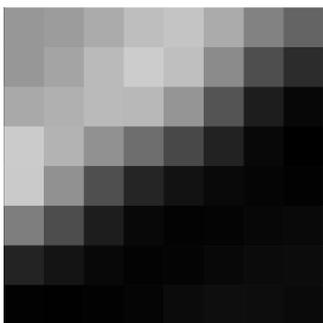
≡

187	191	188	189	197	208	200	115
188	186	187	195	204	204	117	55
189	193	202	206	194	151	53	42
202	209	202	172	106	50	41	35
209	193	144	58	50	41	34	39
175	98	53	47	48	41	38	40
66	40	35	43	42	41	39	50
41	39	37	45	45	53	63	50

DCT →

887	255	-33	51	-6	3	6	-1
411	72	-118	27	-32	-2	1	-4
5	-200	-49	41	-19	20	-10	-4
-16	-21	97	35	-8	12	-7	12
21	18	44	-43	-32	8	-19	12
-1	-14	-15	-35	17	13	-10	0
17	-4	1	14	15	2	-1	0
0	-8	2	0	-12	-20	10	3

$$y_r(i, j) = \left[\frac{y(i, j)}{q(i, j)} \right] \cdot q(i, j)$$



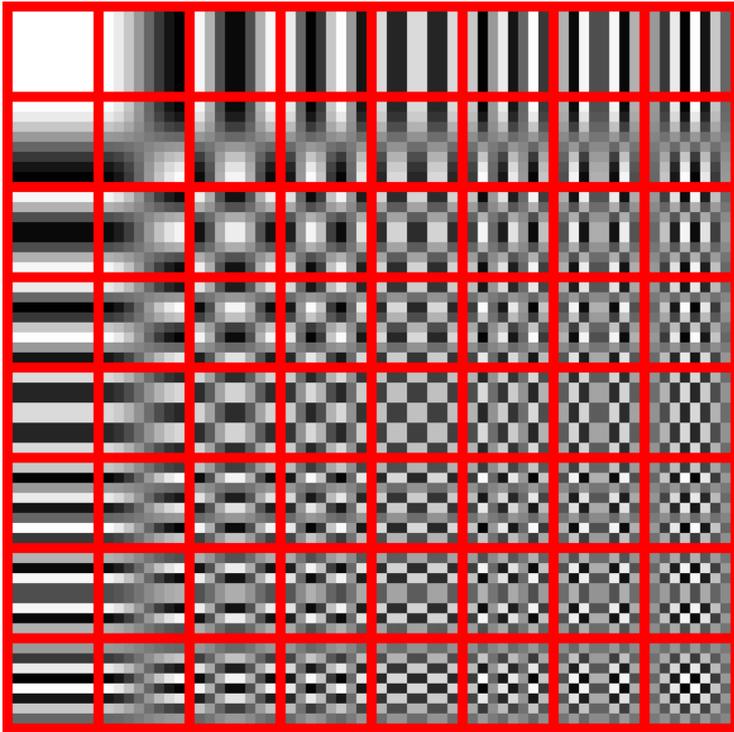
≡

177	180	188	198	201	189	164	144
177	184	196	206	199	170	128	97
187	191	197	195	176	133	79	41
205	192	173	151	123	86	45	17
205	174	129	89	63	47	35	27
162	127	79	43	30	33	41	46
86	67	43	31	33	43	50	52
25	23	25	36	50	57	54	47

← IDCT

880	240	-25	37	0	0	0	0
405	57	-112	0	0	0	0	0
0	-196	-35	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Basisfunktionen der DCT



Quelle: Wikipedia

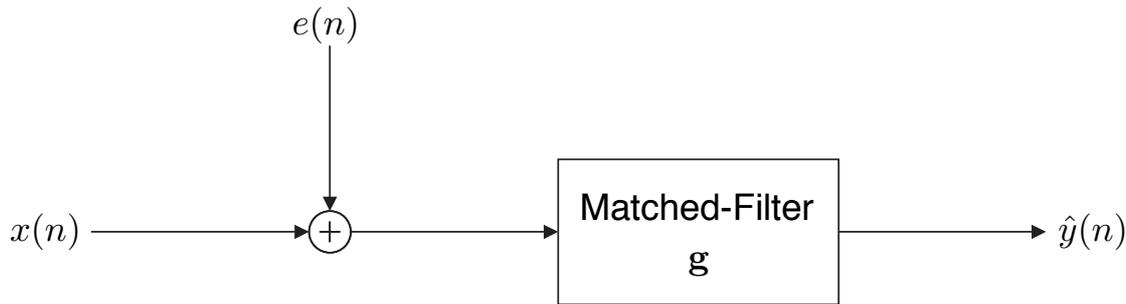
Vergrößertes JPEG-Bild



Quelle: Wikipedia

6.2 Matched-Filter

6.2.1 Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnisses (SNR)



- **Ausgangssituation:** bekanntes Nutzsignal $x(n)$ mit additiv überlagerter mittelwertfreier Störung $e(n)$
- **Gesucht:** lineares Optimalfilter zur Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnisses
- **Signalvektoren:**

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-K+1)]^T$$

$$\mathbf{e}(n) = [e(n) \ e(n-1) \ \dots \ e(n-K+1)]^T$$

$$\mathbf{g} = [g(0) \ g(1) \ g(2) \ \dots \ g(K-1)]^T$$

6.2.1 Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnisses

- **Signalmodell für N Zeitpunkte (Faltungssumme):**

$$\hat{y}(n) = \mathbf{x}^T(n) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{e}^T(n) \cdot \mathbf{g}$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}(n-N+1) = \mathbf{x}^T(n-N+1) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{e}^T(n-N+1) \cdot \mathbf{g}$$

Indizes von $\mathbf{x}(n)$ und $\mathbf{e}(n)$ laufen in Gegenrichtung zum Index von \mathbf{g}

- **Matrix-Notation:** $\hat{\mathbf{y}}(n) = \mathbf{X}(n) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{E}(n) \cdot \mathbf{g}$

$$\mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} x(n) & \dots & x(n-K+1) \\ \vdots & & \vdots \\ x(n-N+1) & \dots & x(n-N-K+2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(n) = \begin{bmatrix} e(n) & \dots & e(n-K+1) \\ \vdots & & \vdots \\ e(n-N+1) & \dots & e(n-N-K+2) \end{bmatrix}$$

- Leistung des Ausgangssignals $\hat{y}(n)$ (Signalenergie durch Zeitfenster N):

$$P_{\hat{y}} = P_x + P_e = \frac{1}{N} \hat{\mathbf{y}}^T(n) \hat{\mathbf{y}}(n) = \frac{1}{N} \mathbf{g}^T \mathbf{X}^T(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{g} + \frac{1}{N} \mathbf{g}^T \mathbf{E}^T(n) \mathbf{E}(n) \mathbf{g}$$

- Dabei sind die Matrixprodukte gerade Schätzungen der Autokorrelationsmatrix des Eingangssignals bzw. der Autokovarianzmatrix der Störung:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{N} \mathbf{X}^T(n) \mathbf{X}(n)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{ee} = \frac{1}{N} \mathbf{E}^T(n) \mathbf{E}(n)$$

- Die Elemente der Autokorrelationsmatrix des Eingangssignals $x(n)$ beschreiben die Autokorrelation für die zeitdiskrete Verschiebung i :

$$\hat{r}_{xx}(i) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(n-j) x(n-i-j)$$

- Das Rauschen sei weiß: $\mathbf{C}_{ee} = \sigma_e^2 \mathbf{I}$

- Aus der Leistung des gefilterten Ausgangssignals ergibt sich für das SNR:

$$P_{\hat{y}} = P_x + P_e = \mathbf{g}^T \hat{\mathbf{R}}_{xx} \mathbf{g} + \sigma_e^2 \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \text{SNR} = \frac{P_x}{P_e} = \frac{\mathbf{g}^T \hat{\mathbf{R}}_{xx} \mathbf{g}}{\sigma_e^2 \mathbf{g}^T \mathbf{g}}$$

- Norm $\mathbf{g}^T \mathbf{g}$ der gesuchten Impulsantwort \mathbf{g} steht im Zähler und im Nenner; sie geht daher nicht in das SNR ein und kann auf die Energie 1 normiert werden:

$$\|\mathbf{g}\|^2 = \mathbf{g}^T \mathbf{g} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{g}^T \mathbf{g} - 1) = 0 \quad \text{Nebenbedingung}$$

- SNR-Maximierung mit Nebenbedingung mittels Lagrange-Multiplikators:

$$\mathbf{g}^T \hat{\mathbf{R}}_{xx} \mathbf{g} - \lambda (\mathbf{g}^T \mathbf{g} - 1) \quad \rightarrow \quad \max$$

- Notwendige Bedingung für Maximum durch Differentiation nach \mathbf{g} :

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} \mathbf{g} - \lambda \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \text{SNR} = \lambda / \sigma_e^2$$

- Eigenwertproblem: Gesuchte Impulsantwort ist Eigenvektor zum größten Eigenwert λ_{\max}

6.2.2 Korrelationsempfänger

- Im Folgenden: Betrachtung eines einzelnen Ausgangswertes $\hat{y}(n)$
- **Wunsch:** Filterausgang $\hat{y}(n)$ maximal, wenn bekanntes Signal $\mathbf{x}(n)$ am Eingang vorliegt
- **Anwendungen:** Erkennung reflektierter Radarsignale, Signaldetektion in einem Nachrichtenkanal, Objekterkennung und -ortung in Bildsignalen
- **Signalmodell:** $\hat{y}(n) = a \cdot \mathbf{x}^T(n) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{e}^T(n) \cdot \mathbf{g}$

- Aus der Leistung erhält man das SNR zu:

$$P_{\hat{y}} = P_x + P_e = (a \mathbf{g}^T \mathbf{x})^2 + \underbrace{\sigma_e^2 \mathbf{g}^T \mathbf{g}}_{\stackrel{!}{=} 1} \Rightarrow \text{SNR} = \frac{P_x}{P_e} = \frac{a^2}{\sigma_e^2} \cdot (\mathbf{g}^T \mathbf{x})^2$$

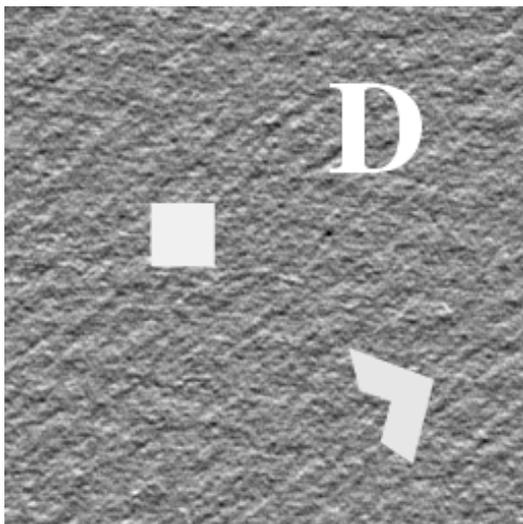
- SNR maximal, wenn \mathbf{g} und $\mathbf{x}(n)$ proportional; die Impulsantwort und der Ausgang $\hat{y}(n)$ für das verschobene Eingangssignal $a \cdot \mathbf{x}(n-m)$ sind dann:

$$g(k) = \sqrt{\frac{1}{E_x}} \cdot x(-k) \quad \rightarrow \quad \hat{y}(n) = a \sqrt{\frac{1}{E_x}} r_{xx}(n-m) + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{E_x}} r_{ex}(n-m)}_{\approx 0}$$

- Da der Filterausgang der um die Signallage m verschobenen AKF von $x(n)$ entspricht, sollte $x(n)$ einen ausgeprägten Peak in der AKF besitzen

6.2.2 Korrelationsempfänger

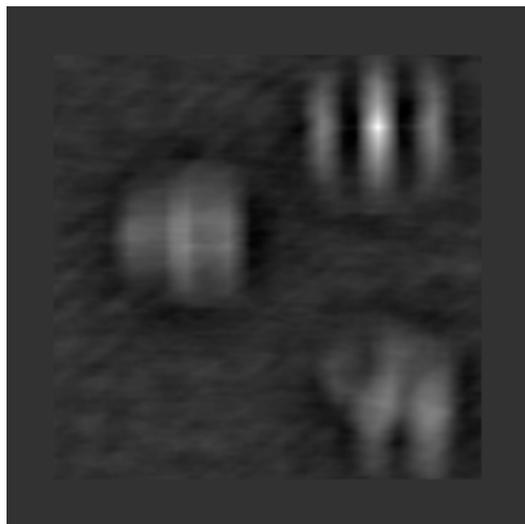
Beispiel: Objekterkennung in Bildsignalen und Feststellung ihrer Lage



Eingangsbild $b(\mathbf{n})$



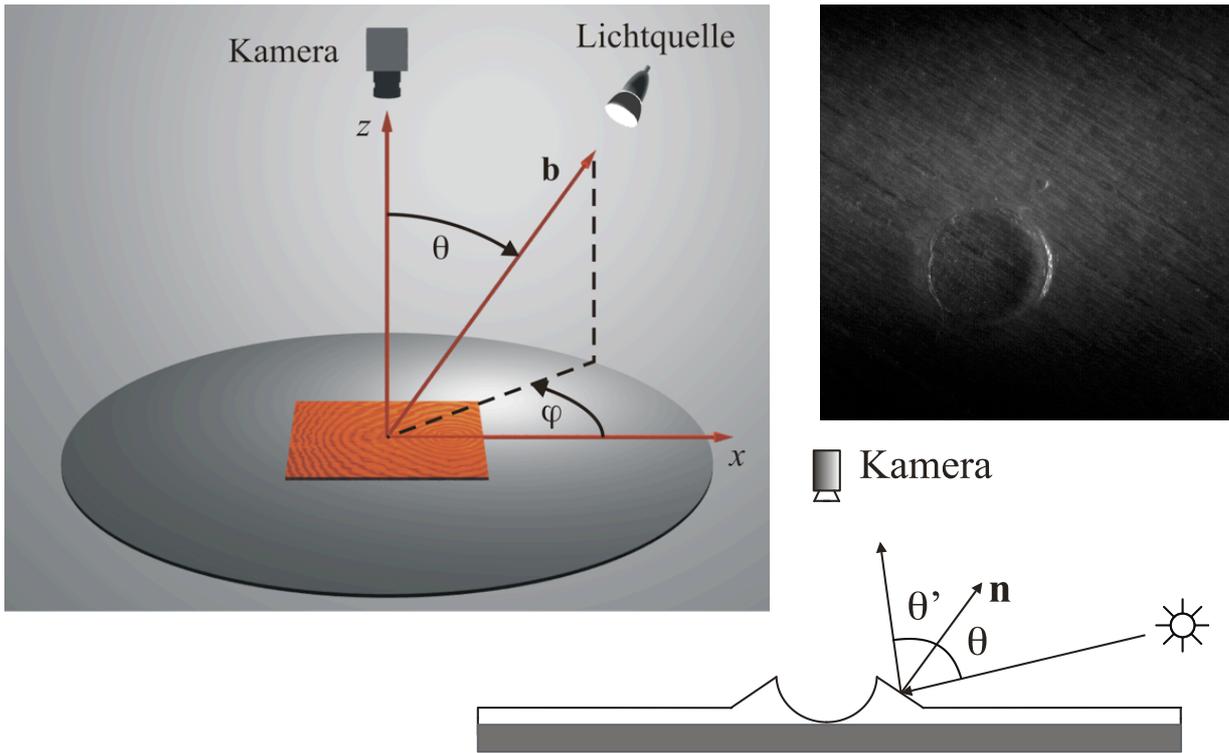
Impulsantwort
 $g(\mathbf{n}) = x(-\mathbf{n})$



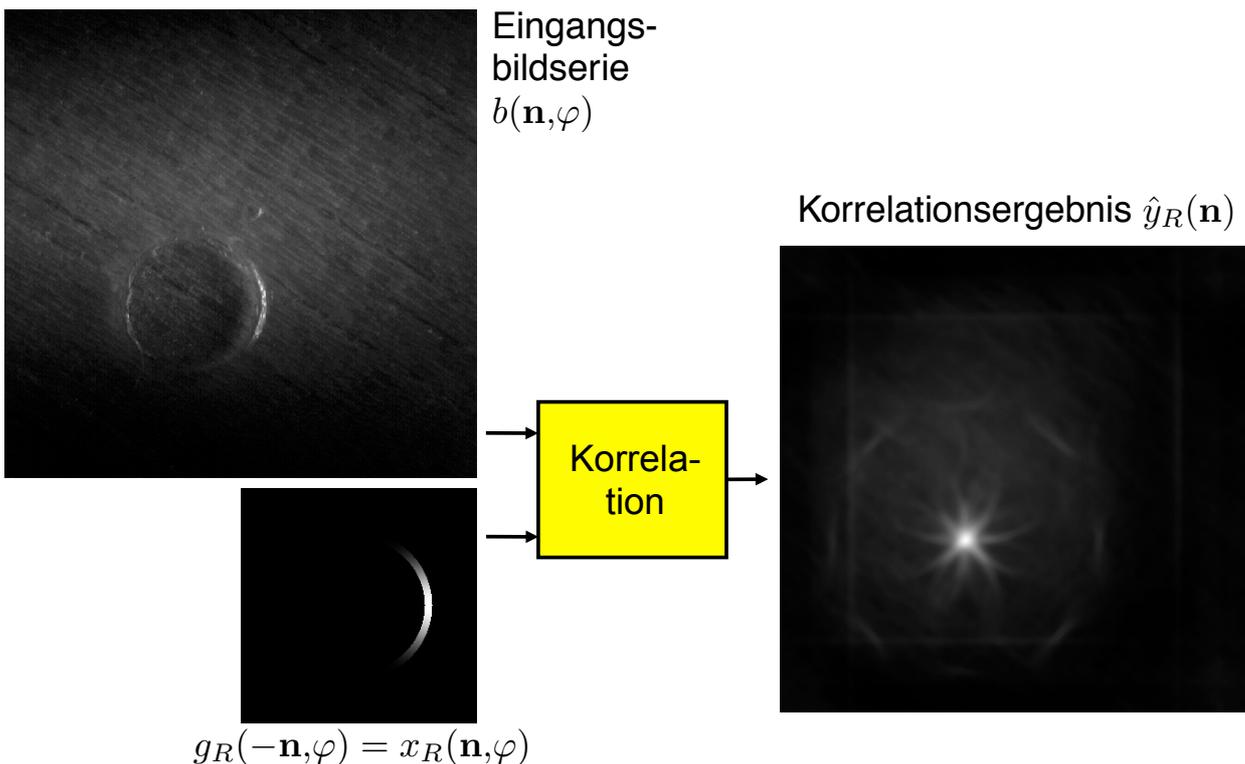
Korrelationsergebnis $\hat{y}(\mathbf{n})$

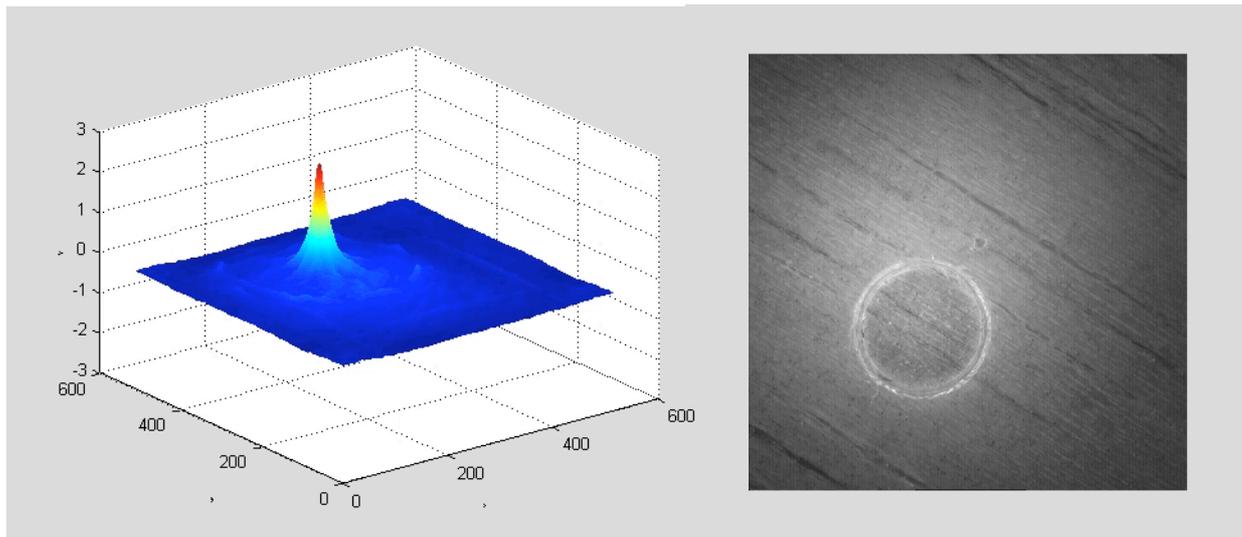
- Korrelationsansätze sind empfindlich gegen Rotation, Skalierung und Verzerrung der gesuchten, bekannten Objekte

Beispiel: Kraterdetektion auf lackierten Holzoberflächen



Korrelationsfilter für Bildserie





Ergebnis der Korrelationsfilterung

Detektionsergebnisse